

Algèbre

Pr. Badr NEJJAR

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Ecole Supérieure de Technologie

Chapitre 2 : Les matrices

II.1 Définition et exemples

Définition

- Une matrice d'ordre (n, p) est un tableau de nombres réels avec n lignes et p colonnes.
- L'ensemble des matrices d'ordre (n, p) s'écrit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- L'élément du tableau qui s'écrit à la i ème ligne et à la j ème colonne se note a_{ij} .
- Les a_{ij} s'appellent les coefficients de la matrice.
Ainsi une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ s'écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On écrit aussi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$

Exemples

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre $(2, 3)$ donc appartient à $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne et $A \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
- $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne et $A \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre n . Le nombre de lignes égale le nombre de colonnes. On écrit $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

● $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

- La matrice nulle, dont tous les éléments sont nuls, notée 0.

● $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale ($a_{ij} = 0, \forall i \neq j$).

● $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité ou la matrice identité.

II.2 Opérations sur les matrices

- Deux matrices de même ordre (n, p) sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, a_{ij} = b_{ij}).$$

- Si deux matrices sont de même ordre alors on peut les additionner.

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ alors } A + B = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

avec, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$.

Ou bien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

- Soustraction:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \dots & a_{1p} - b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & \dots & a_{np} - b_{np} \end{pmatrix}$$

Propriétés:

- $A + B = B + A$. On dit que l'addition est commutative.
- $A + 0 = 0 + A = A$. On dit que la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition.
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$. On dit que toute matrice admet une matrice opposée.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$. On dit que l'addition est associative. On peut donc écrire $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

- Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda A = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$
avec, $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$.

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Produit d'une matrice par un réel

Propriétés: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda \times \mu)A$.
- $1A = A$.

Produit de deux matrices

On peut effectuer le produit AB de deux matrices si et seulement si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B .

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

avec, $c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$.

- Si A est d'ordre (n, q) et B est d'ordre (q, p) alors AB est d'ordre (n, p) .
- L'élément c_{ij} est obtenu en multipliant la i ème ligne de A par la j ème colonne de B de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{iq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{qj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj}$$

Exemples

- $$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag + ch + ei \\ bg + dh + fi \end{pmatrix}.$$

- $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \quad -1 \quad 3 \quad 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Soient $A = (a_1 \quad \dots \quad a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Le produit de A par B est la matrice d'ordre $(1, 1)$ dont l'unique coefficient est $a_1 b_1 + \dots + a_p b_p$.

Propriétés: Sous réserve d'existence des produits, on a:

① $I_n A = A I_n = A$ où I_n est la matrice unité.

② $(AB)C = A(BC)$.

③ $A(B + C) = AB + AC$.

④ $(A + B)C = AC + BC$.

Attention :

- En général $AB \neq BA$.

D'une part AB peut exister et BA non.

Par exemple: $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Pour des raisons d'ordre, AB existe et BA n'existe pas.

D'autre part, même si les matrices sont carrées, on a en général $AB \neq BA$. Par exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et} \\ BA = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

- ($A = 0$ ou $B = 0$) $\Rightarrow$ ($AB = 0$) mais la réciproque est fausse.

Par exemple: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donnent

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Les produits de deux matrices possibles sont:

La transposition

Définition [La transposée d'une matrice]

On appelle transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, notée A^T , la matrice $(a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ où, $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La transposée d'une matrice d'ordre (n, p) est une matrice d'ordre (p, n) .

La transposition

Propriétés:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 8 & -17 & -13 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

La transposition

Définition [Matrice symétrique]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (A est une matrice carrée).

A est une matrice symétrique si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$.

Ou bien A est une matrice symétrique si et seulement si $A^T = A$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

Les puissances d'une matrices carrée

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On pose $A^0 = I_n$, et pour tout entier naturel non nul k , $A^k = \underbrace{A \dots A}_{k \text{ facteurs}}$.

Remarques :

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes les matrices ont le même ordre donc tous les produits sont possibles.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AI_n = I_nA = A$.
- Pour toutes les matrices A , B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
 $A = B \Rightarrow AC = BC$ et $A = B \Rightarrow CA = CB$.

Exemple

$$I_n^k = I_n, 0^k = 0.$$

Les puissances d'une matrices carrée

Définition [Matrice nilpotente]

Une matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

En général, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Nous pouvons simplement dire que $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Si A et B commutent ($AB = BA$) alors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Si A et B ne commutent pas ($AB \neq BA$) alors $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Remarque :

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ , les matrices A et λI_n commutent.

II.3 Les matrices inversibles

Définition [Matrice inversible]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible ou régulière si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

B s'appelle l'inverse de A et on écrit $B = A^{-1}$.

Une matrice non inversible est dite singulière.

Si une matrice A admet un inverse, cet inverse est unique.

En effet:

Soient B et C deux matrices telles que:

$$AB = BA = I_n \text{ et } AC = CA = I_n.$$

$$\text{alors } B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

Exemple

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix}$ est la matrice $B = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$.

Proposition

- 1 $I_n^{-1} = I_n.$
- 2 $(A^{-1})^{-1} = A.$
- 3 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$
- 4 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (attention à l'ordre).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ admet dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une unique solution. On a alors $X = A^{-1}Y$.

Exemple

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Soient a et b deux nombres réels. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 1$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une opération élémentaire sur les ligne d'une matrice est un échange de lignes, un produit d'une ligne par un réel non nul, l'addition à une ligne d'une autre ligne multipliée par un réel.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: on échange la ligne L_i avec la ligne L_j .
- $L_i \leftarrow aL_i$ avec $a \neq 0$: on multiplie la ligne L_i par a .
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$: on remplace la ligne L_i par $aL_i + bL_j$.

Algorithme de Gausse

- 1 On place A et I_n côte à côte.
- 2 On effectue des opérations élémentaires sur A et I_n pour transformer la matrice A en une matrice triangulaire B . On regarde alors les termes diagonaux de la matrice B . S'il y a un ou plusieurs 0 alors B n'est pas inversible et donc A n'est pas inversible. S'il n'y a pas de 0 alors B est inversible et donc A est inversible.
- 3 Si A est inversible on continue à transformer la matrice A en la matrice unité I_n . La même suite d'opérations élémentaires transforme alors I_n en A^{-1} .

Exemple

Inversons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Algorithme de Gausse

On place A et I_4 côte à côte comme suit:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

On va placer des 0 sous le 1 de la première colonne.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 11 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -10 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 10 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

Algorithme de Gausse

On va placer un 1 sur la diagonale de la deuxième colonne.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -10 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 10 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

On va placer des 0 sous le 1 de la deuxième colonne.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/3 & 4/3 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -25/3 & 1/3 & -5/3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{array}$$

Algorithme de Gausse

On va placer des 0 sous le 1 de la troisième colonne.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/3 & 4/3 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \end{array}$$

alors nous avons transformé la matrice A à une matrice triangulaire qui n'a pas des 0 sur la diagonale. Donc la matrice A est inversible.

On va placer des 0 au dessus du 1 de la dernière colonne.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 10 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -35/3 & -10/3 & -22/3 & -11/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -38/3 & -10/3 & -25/3 & -14/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{11}{3}L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{14}{3}L_4 \\ L_4 \end{array}$$

Algorithme de Gausse

On va placer des 0 au dessus du 1 de la deuxième colonne.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/3 & -1/3 & -4/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -35/3 & -10/3 & -22/3 & -11/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -38/3 & -10/3 & -25/3 & -14/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

alors la matrice à gauche est la matrice I_4 .

D'où l'inverse de la matrice A est:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & -1/3 & -4/3 & -2/3 \\ -35/3 & -10/3 & -22/3 & -11/3 \\ -38/3 & -10/3 & -25/3 & -14/3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3 : Les déterminants